#<window 480 on *Async Shell Command*>

I Capacité numérique

Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

II Modules

Le module `signal` de `scipy` (documentation) donne accès entre autres :

- à des fonctions représentant des signaux usuels (créneau avec `square`, triangle et dents de scie avec `sawtooth`)
- à des fonctions définissant des fonctions de transfert de filtres par les coefficients de leurs fractions rationnelles (fonction `freqs`)

Le module `fft` de `scipy` (documentation) permet entre autres de réaliser les transformées de Fourier et transformées de Fourier inverse (en utilisant l'algorithme de Fast Fourier Transform) pour :

- à partir d'un signal f(t) numérisé, calculer une approximation numérique de son spectre de Fourier discret
- à partir d'un spectre de Fourier discret, calculer la valeur d'une fonction correspondante en un ensemble d'instants.

Dans ces deux cas, l'ensemble des instants où est évaluée la fonction et l'ensemble des fréquences où est évaluée sa transformée de Fourier sont tous les deux discrets.

Le module `ma` de `numpy` (documentation) offre ici la facilité de «masquer» certains éléments d'un tableau qu'on souhaite éliminer : ici les parties du spectre de poids trop faible.

```
%matplotlib notebook
```

La ligne précédente ne doit apparaître que dans les notebooks `Jupyter`, pas dans un fichier python.

```
%matplotlib inline
```

```
import numpy as np
from scipy import signal
from scipy import fftpack
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.ma as ma
```

III Étude d'un filtre du premier ordre

III.1 Définition

On définit un filtre passe-bas du premier ordre par son gain en bande passante et sa fréquence de coupure.

```
pi = np.pi
# Définition du filtre
f_c = 2e2               # fréquence de coupure (en Hz)
omega_c = 2.0*pi*f_c    # pulsation de coupure (en rad/s)
H_0 = 2                 # gain en bande passante
# Coefficients du dénominateur rangés par degrés décroissants
a = np.array( [1/omega_c,1.0] )
# Coefficients du numérateur
b = np.array( [H_0] )
H_coeffs = (b,a)
```

III.2 Diagramme de Bode

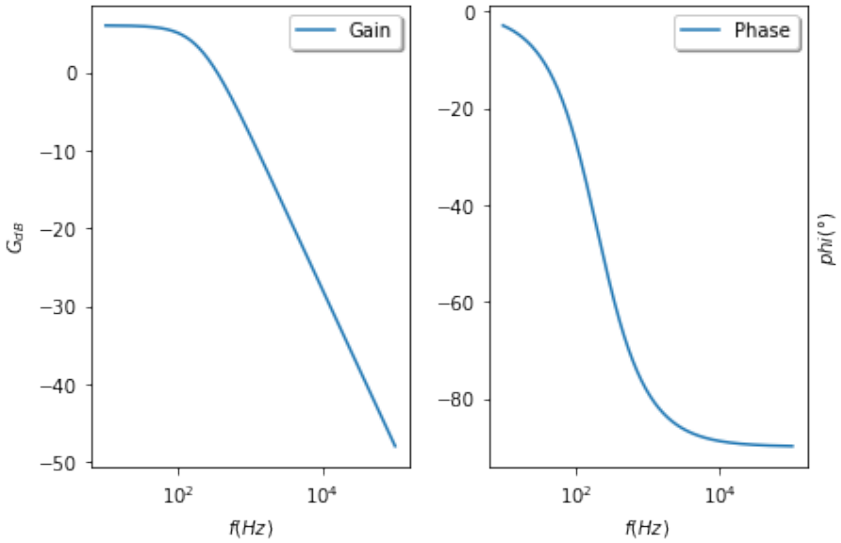
On fait calculer le module et l'argument de la fonction de transfert pour un ensemble de fréquences déterminé, choisi en échelle logarithmique : ici 400 fréquences équiréparties en échelle log entre 10^1 et 10^5 Hz. La fonction `signal.freqs` renvoie :

- `w` la liste des pulsations utilisées
- `H` le tableau des valeurs (complexes) de la fonction de transfert pour ces pulsations.

```
# Plage de fréquence à étudier
frequences = np.logspace(1 , 5 , 400)
[ w, H ] = signal.freqs(b,a,2*pi*frequences)
```

On peut ensuite tracer le diagramme de Bode correspondant.

```python
figBode1,(axBodeGain1,axBodePhase1) = plt.subplots(1,2) #pour avoir deux figures côte à côte
figBode1.tight_layout()
# gain en décibel, np.absolute calcule le module
G = 20.0 * np.log10(np.absolute(H))
# phase en degrés, np.angle calcule l'argument en radian, converti par rad2deg
phase = np.rad2deg(np.angle(H))
axBodeGain1.semilogx()
axBodePhase1.semilogx()
axBodeGain1.plot(frequences,G,label='Gain')
axBodeGain1.set_xlabel(r"$f(Hz)$")
axBodeGain1.set_ylabel(r"$G_{dB}$" )
axBodePhase1.plot(frequences,phase,label='Phase')
axBodePhase1.set_xlabel(r"$f(Hz)$")
axBodePhase1.set_ylabel(r"$phi(°)$")
axBodePhase1.yaxis.set_label_position("right")
axBodePhase1.legend(loc='best',shadow=True)
axBodeGain1.legend(loc='best',shadow=True)
figBode1.show()
```



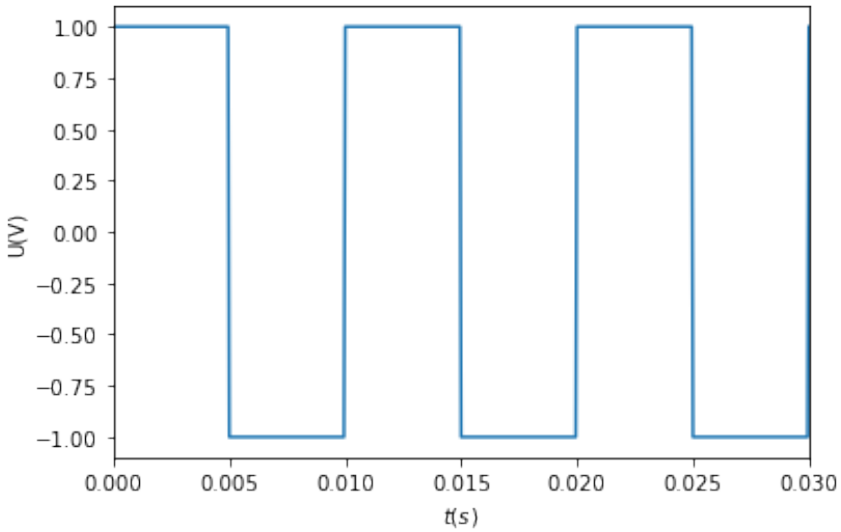
IV Simulation du filtrage

IV.1 Échantillonage de la fonction

On calcule les valeurs de la fonction sur laquelle sera appliquée le filtre sur un échantillon d'instants. La durée entre deux instants `Delta_t` doit être suffisamment courte pour que deux fonctions différentes n'aient pas le même échantillonage. On utilisera le «critère de Shannon» selon lequel `Delta_t = 1/(2 fmax)` avec `fmax` la fréquence maximale du spectre du signal.

On utilise ici une fonction créneau de fréquence `fCre`. Pour que son échantillonnage reproduise fidèlement ses harmoniques jusqu'au rang `9`, on doit donc échantillonner avec `Delta_t = 1/(18 fCre)`. On rajoute un facteur `10` pour augmenter la précision.

```python
HarmoniqueMax = 9
fCre = 100 #Hz
Delta_t = 1/(20*HarmoniqueMax*fCre)
echantillon_t = np.arange(0,20/fCre,Delta_t) # pour disposer de 20 périodes pour l'échantillonage
EntreeCreneau = signal.square(echantillon_t*2*pi*fCre) # signal.square a pour période 2 pi
figCreneau,axCreneau = plt.subplots()
axCreneau.set_xlim(0,3/fCre)
axCreneau.plot(echantillon_t,EntreeCreneau)
axCreneau.set_xlabel(r"$t(s)$")
axCreneau.set_ylabel(r"U(V)" )
figCreneau.show()
```

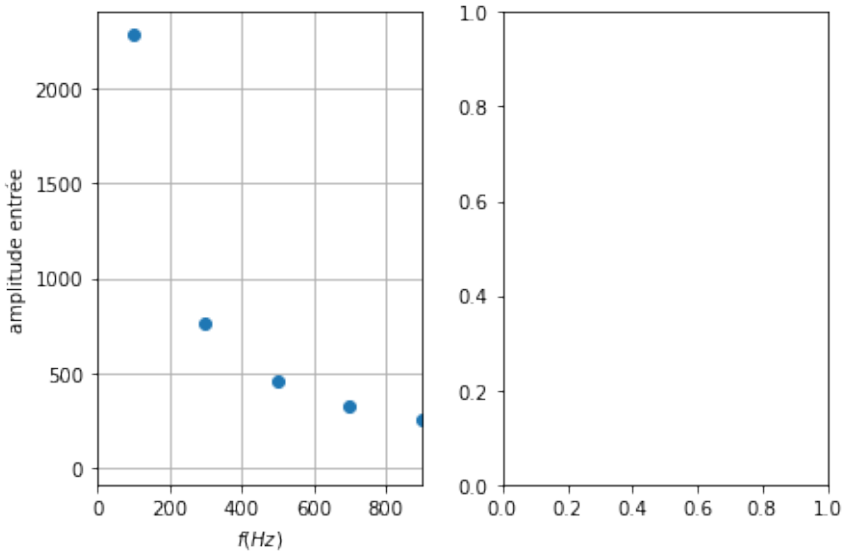


IV.2 Transformée de Fourier rapide

On calcule les fréquences `FrequencesFFTCreneau` adaptées à l'échantillonage avec `fftfreq`. On applique la transformée de Fourier rapide au signal échantillonné avec `fft` pour obtenir `FFTEntreeCreneau`, un tableau des amplitudes complexes des composantes de Fourier de `EntreeCreneau`. Le masque `mask` permet de ne garder à l'affichage que les composantes de Fourier dont l'amplitude est supérieure à un seuil.

On trace ensuite les modules de ces amplitudes complexes.

```
FrequencesFFTCreneau =  fftpack.fftfreq(len(EntreeCreneau) , Delta_t)
FFTEntreeCreneau = fftpack.fft(EntreeCreneau)
CutoffGdB=40
FFTEntreeCreneauGdB=20*np.log10(np.absolute(FFTEntreeCreneau))
mask=ma.masked_less(FFTEntreeCreneauGdB,np.max(FFTEntreeCreneauGdB)-CutoffGdB).mask
FrequencesFFTCreneauMasked=FrequencesFFTCreneau[~mask]
FFTEntreeCreneauMasked=FFTEntreeCreneau[~mask]
FFTEntreeCreneauGdBMasked=FFTEntreeCreneauGdB[~mask]
figFFTCreneau,(axFFTEntreeCreneau,axFFTSortieCreneau) = plt.subplots(1,2) #pour avoir
↪  deux figures côte à côte
figFFTCreneau.tight_layout()
axFFTEntreeCreneau.plot(FrequencesFFTCreneauMasked,
↪  np.absolute(FFTEntreeCreneauMasked), 'o', label='Entree')
axFFTEntreeCreneau.set_xlabel(r"$f(Hz)$")
axFFTEntreeCreneau.set_ylabel(r"amplitude entrée" )
axFFTEntreeCreneau.set_xlim([0, HarmoniqueMax*fCre])
axFFTEntreeCreneau.grid(which='both')
```



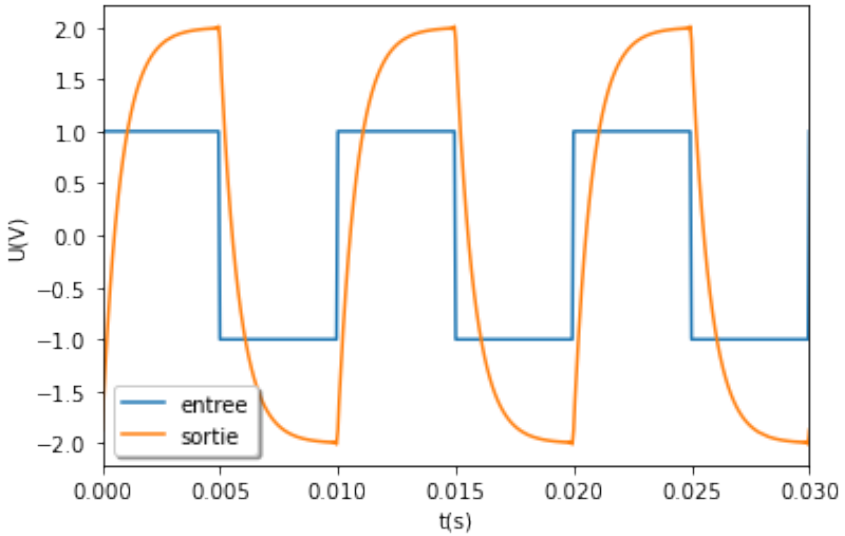
On évalue ensuite les valeurs du gain complexe `HFFTCreneau` calculé pour ces fréquences puis on multiplie une à une les amplitudes de `FFTEntreeCreneau` par la valeur du gain `HFFTCreneau` pour obtenir la transformée de Fourier discrète du signal de sortie `FFTSortieCreneau`.

```
HFFTCreneau = signal.freqs(b,a,2*pi*FrequencesFFTCreneau)[1]
FFTSortieCreneau = HFFTCreneau * FFTEntreeCreneau
FFTSortieCreneauMasked = FFTSortieCreneau[~mask]
axFFTSortieCreneau.plot(FrequencesFFTCreneauMasked,
↪  np.absolute(FFTSortieCreneauMasked), '+', label='Sortie')
axFFTSortieCreneau.set_xlabel(r"$f(Hz)$")
axFFTSortieCreneau.set_ylabel(r"amplitude sortie" )
axFFTSortieCreneau.set_xlim([0, HarmoniqueMax*fCre])
axFFTSortieCreneau.grid(which='both')
axFFTSortieCreneau.yaxis.set_label_position("right")
axFFTSortieCreneau.legend(loc='best',shadow=True)
axFFTEntreeCreneau.legend(loc='best',shadow=True)
figFFTCreneau.show()
```

Il suffit ensuite d'utiliser la transformée de Fourier Inverse `ifft` pour retrouver la fonction en sortie de filtre, qu'on superpose à la fonction en entrée pour les comparer.

L'algorithme d'aller-et-retour entre `fft` et `ifft` peut faire apparaître des parties imaginaires dans le signal de sortie. On vérifie qu'elles sont négligeables avec `max(np.imag)` et on ne trace que la partie réelle

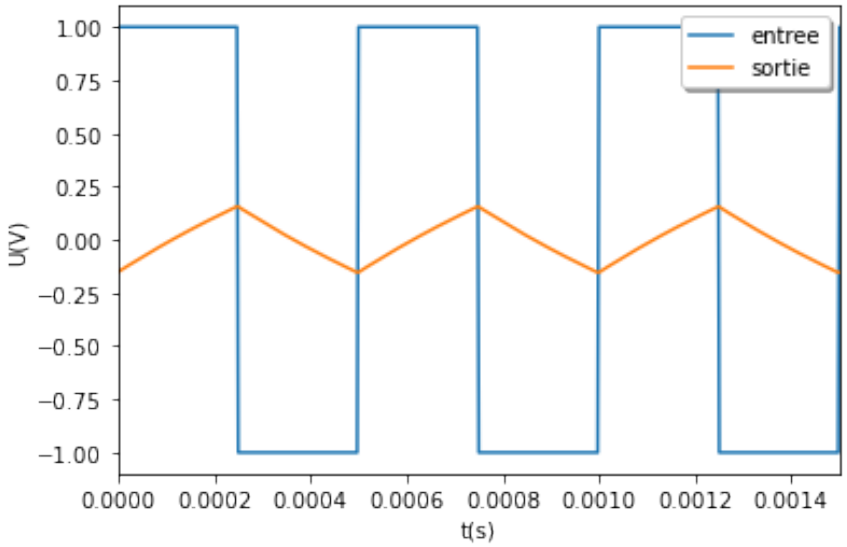
```
SortieCreneau = fftpack.ifft(FFTSortieCreneau)
figCreneauES,axCreneauES = plt.subplots()
axCreneauES.plot(echantillon_t,EntreeCreneau,label='entree')
print(f'max des parties imaginaires {max(np.imag(SortieCreneau))}')
axCreneauES.plot(echantillon_t, np.real(SortieCreneau), label='sortie')
axCreneauES.set_xlim([0, 3/fCre])
axCreneauES.set_xlabel(r't(s)')
axCreneauES.set_ylabel(r'U(V)')
axCreneauES.legend(loc='best',shadow=True)
figCreneauES.show()
```



V Questions du DM05

V.1 II4a

```
# Définition du filtre
DMf_c = 2e2              # fréquence de coupure (en Hz)
DMomega_c = 2.0*pi*DMf_c    # pulsation de coupure (en rad/s)
DMH_0 = 1                # gain en bande passante
# Coefficients du dénominateur rangés par degrés décroissants
DMa = np.array( [1/DMomega_c,1.0] )
# Coefficients du numérateur
DMb = np.array( [DMH_0] )
DMH_coeffs = (DMb,DMa)
DMHarmoniqueMax = 9
DMfCre = 2e3 #Hz
DMCreneauAmplitude = 1
DMDelta_t = 1/(20*DMHarmoniqueMax*DMfCre)
DMechantillon_t = np.arange(0,20/DMfCre,DMDelta_t) # pour disposer de 20 périodes pour l'échantillonage
DMEntreeCreneau = DMCreneauAmplitude * signal.square(DMechantillon_t*2*pi*DMfCre) # signal.square a pour période 2 pi
DMFrequencesFFTCreneau =  fftpack.fftfreq(len(DMEntreeCreneau) , DMDelta_t)
DMFFTEntreeCreneau = fftpack.fft(DMEntreeCreneau)
DMCutoffGdB=40
DMFFTEntreeCreneauGdB=20*np.log10(np.absolute(DMFFTEntreeCreneau))
DMmask=ma.masked_less(DMFFTEntreeCreneauGdB,np.max(DMFFTEntreeCreneauGdB)-DMCutoffGdB).mask
DMFrequencesFFTCreneauMasked=DMFrequencesFFTCreneau[~DMmask]
DMFFTEntreeCreneauMasked = DMFFTEntreeCreneau[~DMmask]
DMFFTEntreeCreneauGdBMasked = DMFFTEntreeCreneauGdB[~DMmask]
DMHFFTCreneau = signal.freqs(DMb,DMa,2*pi*DMFrequencesFFTCreneau)[1]
DMFFTSortieCreneau = DMHFFTCreneau * DMFFTEntreeCreneau
DMFFTSortieCreneauMasked = DMFFTSortieCreneau[~DMmask]
DMSortieCreneau = fftpack.ifft(DMFFTSortieCreneau)
figDMCreneauES,axDMCreneauES = plt.subplots()
axDMCreneauES.plot(DMechantillon_t,DMEntreeCreneau,label='entree')
print(f'max des parties imaginaires {max(np.imag(DMSortieCreneau))}')
axDMCreneauES.plot(DMechantillon_t, np.real(DMSortieCreneau), label='sortie')
axDMCreneauES.set_xlim([0, 3/DMfCre])
axDMCreneauES.set_xlabel(r't(s)')
axDMCreneauES.set_ylabel(r'U(V)')
axDMCreneauES.legend(loc='best',shadow=True)
figDMCreneauES.show()
```



On calcule ensuite l'amplitude du signal triangulaire obtenu :

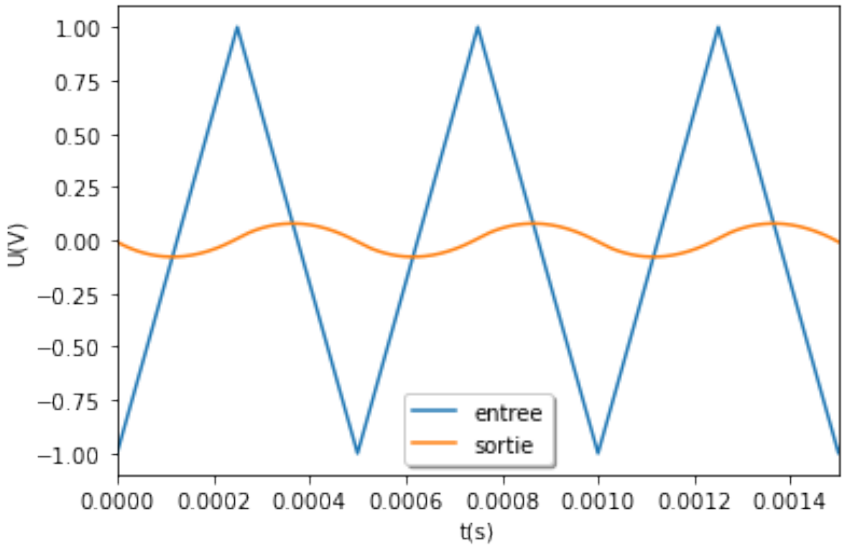
```
print(f'amplitude: {(max(np.real(DMSortieCreneau)) - min(np.real(DMSortieCreneau)))/2} V/')
```

V.2 II4c

On change simplement le signal d'entrée :

```
DMTriAmplitude = 1
DMEntreeTri = DMTriAmplitude * signal.sawtooth(DMechantillon_t*2*pi*DMfCre, width=.5)  # signal.sawtooth a pour période 2 pi
DMFrequencesFFTTri =  fftpack.fftfreq(len(DMEntreeTri) , DMDelta_t)
DMFFTEntreeTri = fftpack.fft(DMEntreeTri)
DMFFTEntreeTriGdB=20*np.log10(np.absolute(DMFFTEntreeTri))
DMmask=ma.masked_less(DMFFTEntreeTriGdB,np.max(DMFFTEntreeTriGdB)-DMCutoffGdB).mask
DMFrequencesFFTTriMasked=DMFrequencesFFTTri[~DMmask]
DMFFTEntreeTriMasked = DMFFTEntreeTri[~DMmask]
DMFFTEntreeTriGdBMasked = DMFFTEntreeTriGdB[~DMmask]
DMHFFTTri = signal.freqs(DMb,DMa,2*pi*DMFrequencesFFTTri)[1]
DMFFTSortieTri = DMHFFTTri * DMFFTEntreeTri
DMFFTSortieTriMasked = DMFFTSortieTri[~DMmask]
DMSortieTri = fftpack.ifft(DMFFTSortieTri)
```

```
figDMTriES,axDMTriES = plt.subplots()
axDMTriES.plot(DMechantillon_t,DMEntreeTri,label='entree')
print(f'max des parties imaginaires {max(np.imag(DMSortieTri))}')
axDMTriES.plot(DMechantillon_t, np.real(DMSortieTri), label='sortie')
axDMTriES.set_xlim([0, 3/DMfCre])
axDMTriES.set_xlabel(r't(s)')
axDMTriES.set_ylabel(r'U(V)')
axDMTriES.legend(loc='best',shadow=True)
figDMTriES.show()
```



V.3 III4b

On change simplement la fonction de transfert, de coefficients `DM2a`. On trace la courbe du signal de sortie ainsi que les spectres de Fourier des signaux d'entrée et de sortie : on y vérifie bien que les amplitudes du fondamental et de la 2^{e}harmonique sont bien très proches[i]La différence, de l'ordre de 5%, est vraisemblablement une erreur d'arrondi qui existait déjà dans le spectre du signal d'entrée dont l'amplitude n'était pas exactement 20% de celle du fondamental.}

On trace également à titre de comparaison la somme :

[i] {

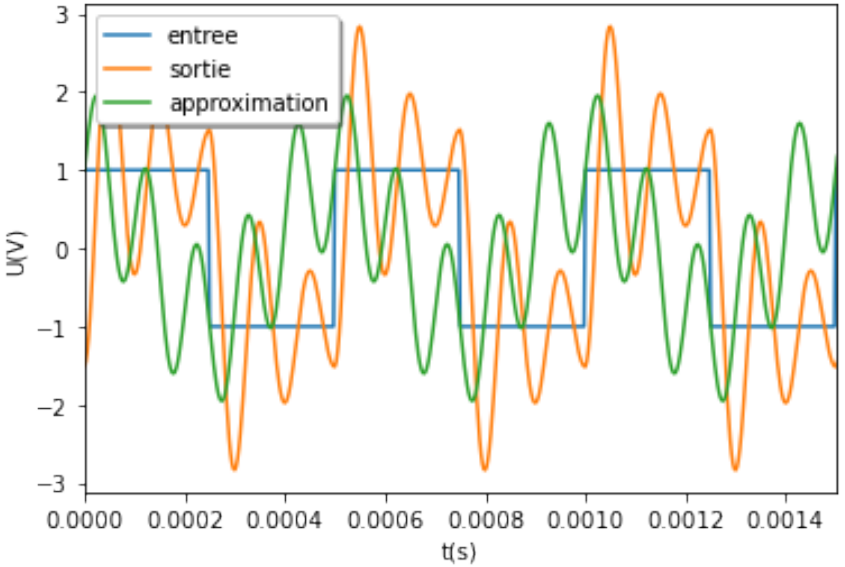
$$\cos(2\pi f_C r\, t) + \cos(10\pi f_C r\, t - \pi/2),$$

qui ressemble au signal produit par le filtre mais en diffère significativement car l'harmonique de rang 3 possède une amplitude non négligeable.

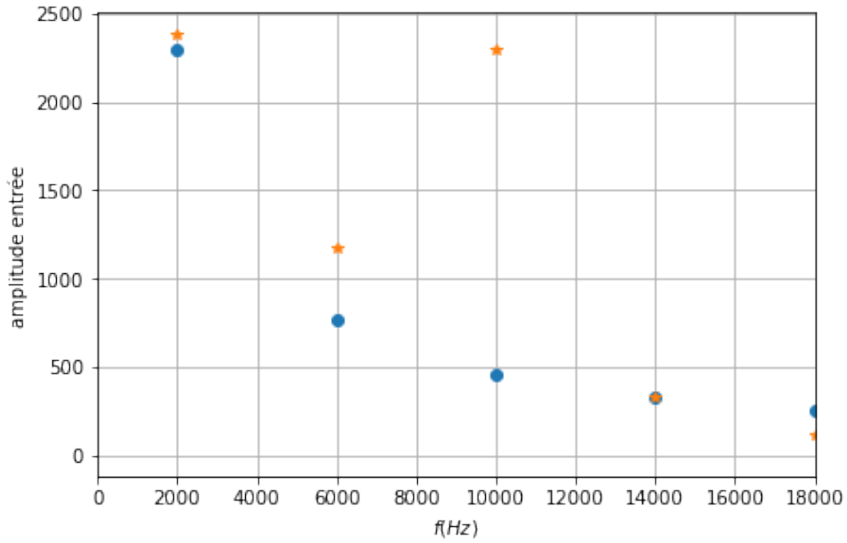
```
# Définition du filtre
DM2fCre = 2e3 #Hz
DM2CreneauAmplitude = 1
DM2f_c = 5*DM2fCre              # 5x la fréquence du créneau
DM2Q = 5
DM2omega_c = 2.0*pi*DM2f_c    # pulsation de coupure (en rad/s)
DM2H_0 = 1                  # gain en bande passante
# Coefficients du dénominateur rangés par degrés décroissants
DM2a = np.array( [1/(DM2omega_c)**2, 1/(DM2omega_c*DM2Q), 1.0] )
# Coefficients du numérateur
DM2b = np.array( [DM2H_0] )
DM2H_coeffs = (DM2b,DM2a)
DM2HarmoniqueMax = 9
DM2Delta_t = 1/(20*DM2HarmoniqueMax*DM2fCre)
DM2echantillon_t = np.arange(0,20/DM2fCre,DM2Delta_t) # pour disposer de 20 périodes pour l'échantillonage
DM2EntreeCreneau = DM2CreneauAmplitude * signal.square(DM2echantillon_t*2*pi*DM2fCre) # signal.square a pour période 2 pi
DM2FrequencesFFTCreneau =  fftpack.fftfreq(len(DM2EntreeCreneau) , DM2Delta_t)
DM2FFTEntreeCreneau = fftpack.fft(DM2EntreeCreneau)
DM2CutoffGdB=40
DM2FFTEntreeCreneauGdB=20*np.log10(np.absolute(DM2FFTEntreeCreneau))
DM2mask=ma.masked_less(DM2FFTEntreeCreneauGdB, np.max(DM2FFTEntreeCreneauGdB)-DM2CutoffGdB).mask
DM2FrequencesFFTCreneauMasked=DM2FrequencesFFTCreneau[~DM2mask]
DM2FFTEntreeCreneauMasked = DM2FFTEntreeCreneau[~DM2mask]
DM2FFTEntreeCreneauGdBMasked = DM2FFTEntreeCreneauGdB[~DM2mask]
DM2HFFTCreneau = signal.freqs(DM2b,DM2a,2*pi*DM2FrequencesFFTCreneau)[1]
DM2FFTSortieCreneau = DM2HFFTCreneau * DM2FFTEntreeCreneau
DM2FFTSortieCreneauMasked = DM2FFTSortieCreneau[~DM2mask]
DM2SortieCreneau = fftpack.ifft(DM2FFTSortieCreneau)

DM2Approx = np.cos(2*pi*DM2fCre*DM2echantillon_t) + np.cos(10*pi*DM2fCre*DM2echantillon_t - np.pi/2)

figDM2CreneauES,axDM2CreneauES = plt.subplots()
axDM2CreneauES.plot(DM2echantillon_t,DM2EntreeCreneau,label='entree')
print(f'max des parties imaginaires {max(np.imag(DM2SortieCreneau))}')
axDM2CreneauES.plot(DM2echantillon_t, np.real(DM2SortieCreneau), label='sortie')
axDM2CreneauES.plot(DM2echantillon_t, DM2Approx, label='approximation')
axDM2CreneauES.set_xlim([0, 3/DM2fCre])
axDM2CreneauES.set_xlabel(r't(s)')
axDM2CreneauES.set_ylabel(r'U(V)')
axDM2CreneauES.legend(loc='best',shadow=True)
figDM2CreneauES.show()
```




```
figDM2FFT,axDM2FFT = plt.subplots()
figDM2FFT.tight_layout()
axDM2FFT.plot(DM2FrequencesFFTCreneauMasked, np.absolute(DM2FFTEntreeCreneauMasked), 'o', label='Entree')
axDM2FFT.plot(DM2FrequencesFFTCreneauMasked, np.absolute(DM2FFTSortieCreneauMasked), '*', label='Sortie')
axDM2FFT.set_xlabel(r"$f(Hz)$")
axDM2FFT.set_ylabel(r"amplitude entrée" )
axDM2FFT.set_xlim([0, HarmoniqueMax*DM2fCre])
axDM2FFT.grid(which='both')
figDM2FFT.show()
```


2500
2000
1500
1000
500
0
amplitude entrée
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
f(Hz)